

# INFLUENCE DES ECHANGES THERMIQUES ENTRE LE CAPTEUR ET SES SUPPORTS SUR LA MESURE DES FLUCTUATIONS DE TEMPERATURE DANS UN ECOULEMENT TURBULENT

F. MILLON, P. PARANTHOEN et M. TRINITE

Laboratoire de Thermodynamique (L.A. au C.N.R.S. No. 230), Faculté des Sciences  
et des Techniques de Rouen, B.P. 67, 76130 Mont-Saint-Aignan, France

(reçu le 21 mars 1977)

**Résumé**—La fonction de transfert d'un fil de platine utilisé comme capteur de température a été calculée dans le but de déterminer l'influence des effets de conduction sur la mesure des fluctuations dans un écoulement turbulent.

Ce calcul montre que les échanges thermiques entre le capteur et ses supports peuvent notablement affecter les mesures de la variance et du spectre des fluctuations de température.

L'influence de ces effets de conduction est mise en évidence sur des mesures effectuées en aval d'une grille chauffée.

## NOTATIONS

Fluide (air)

$U$ , vitesse;  
 $\theta_g$ , température instantanée;  
 $\nu$ , viscosité cinématique;  
 $\lambda_a$ , conductibilité thermique.

Fil de Wollaston

$d_0$ , diamètre;  
 $\rho_0$ , masse volumique;  
 $c_0$ , chaleur spécifique.

Fonction de transfert, spectre

$n$ , fréquence;  
 $\omega$ , fréquence angulaire ( $= 2\pi n$ );  
 $H(n), H(\omega)$ , fonction de transfert;  
 $\phi_{\theta_g}(n)$ , spectre de température;  
 $F_{\theta_g}(n)$ , spectre de température normé à

$$1 \left( = \frac{\phi_{\theta_g}(n)}{\theta_g^2} \right).$$

Symboles

$\bar{\phantom{x}}$ , moyenne temporelle;  
' , fluctuation;  
 $\langle \phantom{x} \rangle$ , moyenne d'ensemble;  
 $*$ , complexe conjugué;  
 $|\phantom{x}|$ , module.

Capteur (fil de platine)

$d$ , diamètre;  
 $l$ , longueur;  
 $\rho$ , masse volumique;  
 $c$ , chaleur spécifique;  
 $\theta_w$ , température instantanée;  
 $R_w$ , résistance électrique;  
 $i$ , courant à travers le fil;  
 $h$ , coefficient de convection;  
 $\lambda$ , conductibilité thermique;

$a$ , diffusivité thermique  $\left( = \frac{\lambda}{\rho c} \right)$ ;  
 $Re$ , nombre de Reynolds  $\left( = \frac{Ud}{\nu} \right)$ ;  
 $Nu$ , nombre de Nusselt  $\left( = \frac{hd}{\lambda_a} \right)$ .

## INTRODUCTION

LES FLUCTUATIONS de température dans un écoulement turbulent (fluide gazeux) sont mesurées par l'intermédiaire des variations de résistance d'un fil de platine ou de tungstène.

L'appareil de mesure généralement utilisé est un thermomètre à résistance dérivé de l'anémomètre à intensité constante.

Un autre appareil, le thermoanémomètre Calvet, est également employé. Le fil est, dans ce cas, alimenté par des impulsions.

Dans les deux cas, il est nécessaire que les dimensions du fil (longueur, diamètre) soient petites: le fil doit être suffisamment court pour avoir une bonne résolution spatiale et suffisamment fin pour que son inertie thermique soit faible.

Il résulte de ces deux effets (résolution spatiale et inertie thermique) une atténuation des fluctuations mesurées d'autant plus importante que les fréquences de ces fluctuations sont élevées.

L'influence de la résolution spatiale a été étudiée par Frenkiel [1] et Wyngaard [2]. Dans ce qui suit, nous supposons que cette influence est négligeable c'est-à-dire que la longueur du fil de mesure est de l'ordre des plus petites structures de l'écoulement turbulent.

L'influence de l'inertie thermique est bien connue depuis les travaux de Dryden et Kueth [3]:

Dans le cas du thermomètre à résistance, l'équation du bilan thermique du fil s'écrit:

$$\frac{\pi d^2}{4} \rho c \frac{d\theta_w}{dt} = -h\pi dl(\theta_w - \theta_g) + R_w i^2.$$

Et si le courant de chauffage est négligeable (le fil est très peu chauffé afin que les mesures de fluctuations de température ne soient pas contaminées par les fluctuations de vitesse):

$$\theta_w + M \frac{d\theta_w}{dt} = \theta_g \quad (1)$$

où  $M = d\rho c/4h$  est le temps de réponse du fil.

Dans le cas du thermoanémomètre, le fil n'est chauffé que durant les impulsions de mesure. Ces impulsions très brèves (de l'ordre de quelques  $\mu s$ ) ne font que décaler sa température d'une valeur constante pratiquement indépendante de la vitesse. Le thermoanémomètre permet ainsi la détermination, par l'intermédiaire d'une tension mémorisée, de la température  $\theta_w$  du fil juste avant l'impulsion de mesure. La relation entre cette température et la température instantanée du fluide  $\theta_g$  est également donnée par l'équation du bilan thermique du fil froid [équation (1)].

Il est bien connu que cette équation différentielle du premier ordre aboutit à la fonction de transfert:

$$H_f(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega M} \quad (2)$$

Dans l'équation du bilan thermique du fil, il n'a pas été tenu compte des échanges de chaleur entre le fil et ses supports. Ces effets de bouts affectent la fonction de transfert du fil qui peut ainsi être très différente de la fonction  $H_f(\omega)$ .

Maye [4] a étudié l'influence des effets de conduction sur la mesure de la température moyenne et des fluctuations près d'une paroi chauffée (gradients de température importants).

Nous nous sommes intéressés à l'influence de ces effets sur la mesure du spectre et de la variance lorsque les gradients de température sont peu élevés [5].

Hojstrup *et al.* [6] ont fait le calcul de la fonction de transfert du fil  $H(\omega)$  dans le cas d'une vitesse moyenne nulle (air calme). Ils ont également mesuré la fonction de transfert d'amplitude  $|H(\omega)|$  au moyen de variations sinusoïdales de température d'origine sonore.

Nous allons étudier le cas d'une vitesse moyenne non nulle où par conséquent le bilan thermique du fil dépend de la convection forcée et des échanges de chaleur avec ses supports.

### 1. CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSFERT DU FIL

Les capteurs que nous utilisons sont obtenus par décapage sur une longueur  $l$  d'un fil de wollaston soudé au préalable aux broches de la sonde à l'aide d'une brasure à base d'argent (Fig. 1a).

En raison des échanges thermiques entre le fil de platine (partie décapée) et le fil de wollaston (partie non décapée), la température du fil de platine n'est pas uniforme (Fig. 1b).

Comme précédemment, nous ne tiendrons pas compte du chauffage du fil par effet Joule, celui-ci étant généralement négligeable dans le cas du thermomètre à résistance et n'intervenant pas dans le cas du thermoanémomètre.

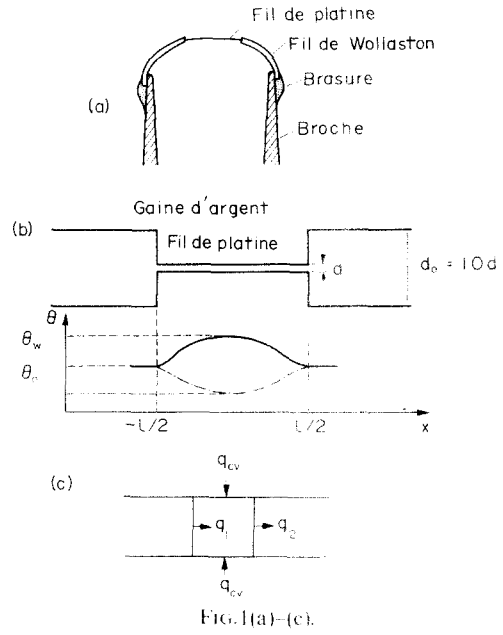


FIG. 1(a)-(c).

L'équation du bilan thermique dans un élément de volume du fil  $dv = (\pi d^2/4)dx$  (Fig. 1c) s'écrit:

$$\frac{\pi d^2}{4} dx \rho c \frac{\partial \theta_w}{\partial t} = q_{cv} + q_{cd}$$

$q_{cv}$ : flux de convection

$q_{cd} = q_1 - q_2$ : apport de chaleur par la conduction

$$q_{cv} = -\pi d dx h (\theta_w - \theta_g)$$

$$q_{cd} = -\frac{\pi d^2}{4} \lambda \left[ \left( \frac{\partial \theta_w}{\partial x} \right)_x - \left( \frac{\partial \theta_w}{\partial x} \right)_{x+dx} \right]$$

$$= \frac{\pi d^2}{4} \lambda \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial x^2} dx.$$

Nous obtenons ainsi en posant:

$$\theta_g(t) = \bar{\theta}_g + \theta'_g(t) \quad \text{et} \quad \theta_w(x, t) = \bar{\theta}_g + \theta'_w(x, t)$$

$$\frac{\partial \theta'_w}{\partial t} = -\frac{1}{M} (\theta'_w - \theta'_g) + a \frac{\partial^2 \theta'_w}{\partial x^2} \quad (3)$$

La température instantanée est mesurée par l'intermédiaire de la résistance électrique du fil, la fluctuation mesurée  $\theta'_m(t)$  vérifie donc:

$$\theta'_m(t) = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \theta'_w(x, t) dx \quad (4)$$

$\theta'_g(t)$ ,  $\theta'_w(x, t)$ ,  $\theta'_m(t)$  peuvent s'exprimer sous la forme d'intégrales de Fourier-Stieltjes:

$$\theta'_g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dZ_g(\omega)$$

$$\theta'_w(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dZ_w(\omega, x)$$

$$\theta'_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dZ_m(\omega).$$

D'après l'équation (3):

$$aM \frac{\partial^2}{\partial x^2} dZ_w(\omega, x) - (1 + j\omega M) dZ_w(\omega, x) = -dZ_g(\omega). \quad (5)$$

Nous supposons que la température aux extrémités du fil de platine est déterminée par la température du fil de wollaston, le volume de celui-ci étant beaucoup plus grand que celui du capteur.

Pour résoudre l'équation (5), nous pourrions prendre comme conditions aux limites:

$$\theta_w(\frac{1}{2}, t) = \theta_w(-\frac{1}{2}, t) = \bar{\theta}_g$$

soit

$$dZ_w(\omega, \frac{1}{2}) = dZ_w(\omega, -\frac{1}{2}) = 0.$$

Mais ceci ne serait plus vrai pour les fluctuations de fréquences telles que  $\omega M_0 \ll 1$  où  $M_0$  est le temps de réponse du fil de wollaston.

Nous prendrons donc:

$$dZ_w(\omega, \frac{1}{2}) = dZ_w(\omega, -\frac{1}{2}) = \frac{dZ_g(\omega)}{1 + j\omega M_0}.$$

Nous obtenons ainsi:

$$dZ_w(\omega, x) = \frac{dZ_g(\omega)}{1 + j\omega M} \left[ 1 - \frac{j\omega(M_0 - M)}{1 + j\omega M_0} \frac{\cosh(\alpha + j\beta)x}{\cosh(\alpha + j\beta)\frac{l}{2}} \right]$$

avec

$$\alpha = \left\{ \frac{1}{2aM} [(1 + \omega^2 M^2)^{1/2} + 1] \right\}^{1/2}$$

et

$$\beta = \left\{ \frac{1}{2aM} [(1 + \omega^2 M^2)^{1/2} - 1] \right\}^{1/2}.$$

D'après (4):

$$dZ_m(\omega) = \frac{1}{l} \int_{-1/2}^{1/2} dZ_w(\omega, x) dx$$

et:

$$dZ_m(\omega) = \frac{dZ_g(\omega)}{1 + j\omega M} \left[ 1 - \frac{j\omega(M_0 - M)}{1 + j\omega M_0} \frac{\tanh(\alpha + j\beta)\frac{l}{2}}{(\alpha + j\beta)\frac{l}{2}} \right]. \quad (6)$$

Pour les fils habituellement utilisés ( $1/d > 200$ ):

$$\tanh(\alpha + j\beta)\frac{l}{2} \sim 1$$

et la fonction de transfert du fil, définie par  $dZ_m(\omega) = H(\omega) dZ_g(\omega)$ , peut être approximée par:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega M} \left[ 1 - \frac{j\omega(M_0 - M)}{1 + j\omega M_0} \frac{2}{(\alpha + j\beta)l} \right]. \quad (7)$$

Le terme  $H_I(\omega) = 1/(1 + j\omega M)$  représente l'influence de l'inertie thermique et le terme

$$H_c(\omega) = 1 - \frac{j\omega(M_0 - M)}{1 + j\omega M_0} \frac{2}{(\alpha + j\beta)l}$$

l'influence des effets de bouts.

## 2. INFLUENCE DES EFFETS DE BOUTS SUR LA MESURE DU SPECTRE DE TEMPERATURE

Le spectre de température  $\phi_{\theta_g}(\omega)$  vérifie la relation:

$$\phi_{\theta_g}(\omega) d\omega = \langle dZ_g^*(\omega) dZ_g(\omega) \rangle.$$

De même pour le spectre mesuré  $\phi_{\theta_m}(\omega)$ :

$$\phi_{\theta_m}(\omega) d\omega = \langle dZ_m^*(\omega) dZ_m(\omega) \rangle.$$

Ainsi:

$$\phi_{\theta_m}(\omega) = |H(\omega)|^2 \phi_{\theta_g}(\omega) \quad (8)$$

$|H(\omega)|^2$  est donné par:

$$|H(\omega)|^2 = |H_I(\omega)|^2 |H_c(\omega)|^2$$

avec:

$$|H_I(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 M^2}$$

$$|H_c(\omega)|^2 = 1 - \frac{\omega^2(M_0 - M)^2}{1 + \omega^2 M_0^2} \frac{4}{l^2(\alpha^2 + \beta^2)} \times \left[ \frac{\alpha l}{1 - \frac{M}{M_0}} \left( 1 + \frac{\beta}{\omega M_0 \alpha} \right) - 1 \right]$$

$M = \rho c / 4h$  peut s'exprimer en fonction du nombre de Nusselt:

$$M = \frac{d^2 \rho c}{4Nu\lambda_a}.$$

Le nombre de Nusselt d'un fil perpendiculaire à la direction de l'écoulement n'est fonction, lorsque la convection forcée est prédominante, que du nombre de Prandtl et du nombre de Reynolds  $Re = Ud/\nu$ .

Une loi empirique de la forme  $Nu = a + bRe^n$ , où  $a$ ,  $b$  et  $n$  sont des constantes, est généralement admise.

Les valeurs proposées pour l'air par différents auteurs sont données dans le Tableau 1.

Tableau 1

Auteurs	a	b	n	Domaine de validité
King	0,32	0,69	0,50	$0,55 < Re < 55$
Kramers	0,39	0,51	0,50	$10^{-2} < Re < 10^4$
Collis et Williams	0,24	0,56	0,45	$0,02 < Re < 44$
Andrews	0,34	0,65	0,45	$0,015 < Re < 20$

Nous avons effectué le calcul de  $|H_c(\omega)|^2$  dans le cas d'un fil de platine de  $2 \mu$  de diamètre. Pour calculer  $M$  et  $M_0$ , nous avons utilisé la formule de Kramers. Nous obtenons:

$$M = 130 \mu s$$

et

$$M_0 = 5 ms.$$

Les valeurs numériques utilisées sont données dans le Tableau 2.

Tableau 2

Fluide	Fil de platine	Fil de Wollaston
$\bar{U} = 600 \text{ cm/s}$	$d = 2 \mu m$	$d_0 = 20 \mu m$
$\bar{\theta}_g = 50^\circ C$	$\rho = 21,4 \text{ g/cm}^3$	$\rho_0 = 10,5 \text{ g/cm}^3$
$\nu = 0,176 \text{ cm}^2/\text{s}$	$c = 0,032 \text{ cal/g} \cdot ^\circ C$	$c_0 = 0,056 \text{ cal/g} \cdot ^\circ C$
$\lambda_a = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ cal/s.cm} \cdot ^\circ C$	$\lambda = 0,17 \text{ cal/s.cm} \cdot ^\circ C$	

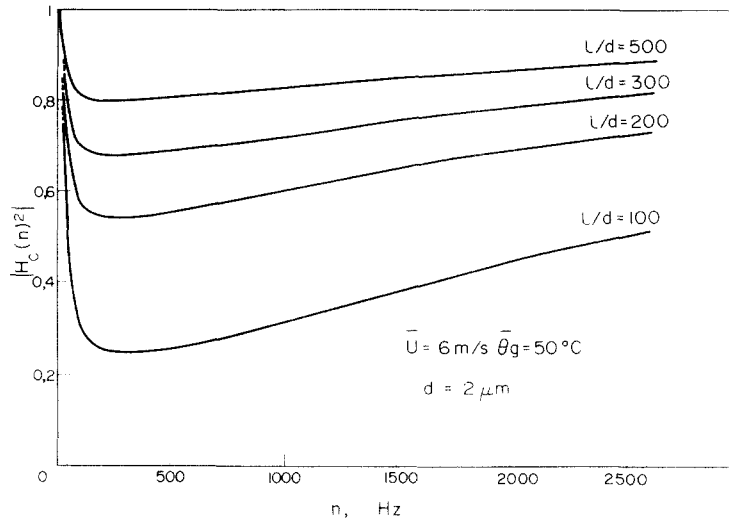


FIG. 2. Influence des effets de bouts sur la mesure du spectre de température: variation de  $|H_c(n)|^2$  en fonction de  $n$  pour différents rapports  $L/d$ .

La variation de  $|H_c(n)|^2$  en fonction de  $n$ , pour différents rapports  $L/d$ , est représentée sur la Fig. 2:  $|H_c(n)|^2$  tend vers 1 aux très basses fréquences. Lorsque  $n$  augmente,  $|H_c(n)|^2$  décroît rapidement, atteint un minimum, puis se met à croître en tendant de nouveau vers 1 pour les très hautes fréquences.

La croissance de  $|H_c(n)|^2$  dans les hautes fréquences est une conséquence du fait que les échanges thermiques entre les fils de platine et de wollaston ont d'autant moins le temps de s'effectuer que les fluctuations de température sont plus rapides.

La décroissance rapide de  $|H_c(n)|^2$  aux très basses fréquences est un effet de l'inertie thermique du fil de wollaston: en effet, celui-ci est sensible aux fluctuations de température de fréquences telles que  $\omega M_0 \ll 1$ . Il n'y a donc pas, dans ce cas, d'échanges thermiques entre le wollaston et le fil de platine. La température de ce dernier reste uniforme et pratiquement égale, à chaque instant, à la température locale de l'écoulement.

Ceci explique la faible atténuation des très basses fréquences ( $|H_c(n)|^2 \approx 1$ ) ainsi que la décroissance de  $|H_c(n)|^2$ , le fil de wollaston devenant de moins en moins sensible aux fluctuations de température au fur et à mesure que la fréquence augmente.

Sur la Fig. 3 sont représentées les variations de  $|H_1(n)|^2$  et  $|H(n)|^2$  pour un rapport  $L/d$  de 500. Cette figure montre l'erreur  $|H_1(n)|^2 - |H(n)|^2$  faite sur l'atténuation du spectre si les effets de bouts sont négligés.

### 3. APPLICATION A LA CORRECTION DE LA VARIANCE MESURÉE

La correction de la variance mesurée  $\overline{\theta_m^2}$  est donnée par:

$$\overline{\theta_g^2} = \int_0^\infty \frac{\overline{\theta_m^2}}{|H(n)|^2 F_{\theta_n}(n)} dn$$

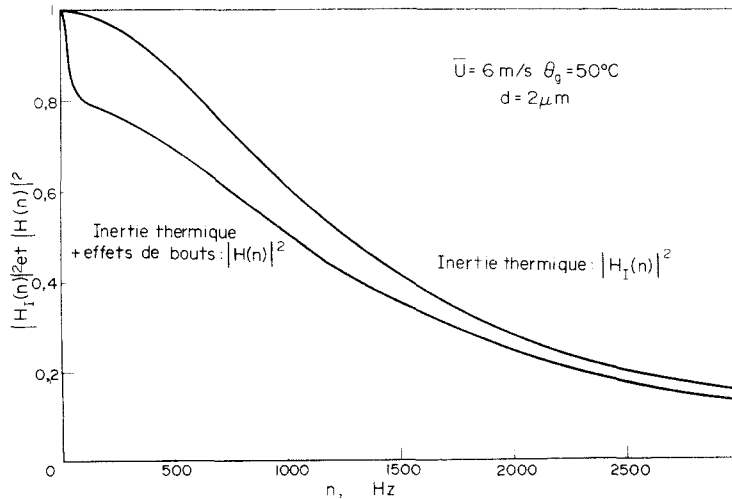


FIG. 3. Comparaison de  $|H_1(n)|^2$  et  $|H(n)|^2$  ( $L/d = 500$ ).

où  $F_{\theta_g}(n)$  est le spectre de fréquences normé à 1 :

$$\int_0^{\infty} F_{\theta_g}(n) dn = 1.$$

Contrairement à l'inertie thermique, les effets de bouts atténuent surtout les fréquences qui généralement contribuent le plus à la variance (basses fréquences). Si le rapport  $l/d$  est faible, la variance mesurée peut donc être très inférieure à la variance réelle.

Nous avons mesuré à l'aide d'un thermoanémomètre Calvet, en utilisant des fils de platine de 2  $\mu\text{m}$  de diamètre et de différentes longueurs, la variance des fluctuations de température en aval d'une grille électriquement chauffée (1100 W). La grille utilisée est une grille biplane à mailles carrées (dimension des mailles: 5 mm). Les mesures ont été effectuées à une distance de 13 cm.

Les valeurs  $\overline{\theta_m'^2}$  obtenues en ce point avec des fils de différentes longueurs sont reportées sur la Fig. 4.

Il apparaît que la mesure est grandement affectée par la longueur du capteur et que pour de faibles rapports

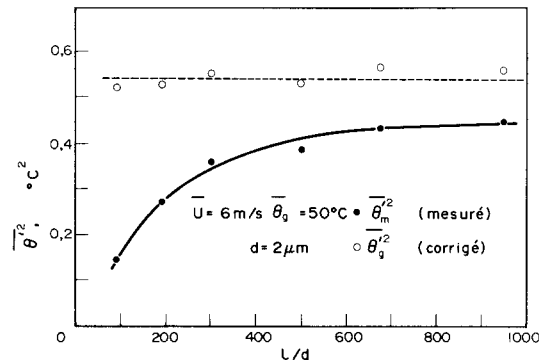


FIG. 4. Influence des effets de bouts et de l'inertie, thermique sur la mesure des fluctuations de température.

$l/d$  (100–200), l'erreur est très importante. Pour chaque valeur mesurée, nous avons effectué la correction précédente. Nous avons reporté sur la Fig. 4 les variances  $\overline{\theta_g'^2}$  ainsi corrigées. Elles se répartissent autour de la valeur  $0,55 (^\circ\text{C})^2$  avec un écart maximum en valeur relative de 5%. Il est important de remarquer que pour un rapport  $l/d = 1000$ , l'erreur sur la variance est de 20%, dont 9% environ sont dus aux effets de bouts et 11% à l'inertie thermique. Ainsi, même pour un rapport  $l/d$  aussi élevé, l'influence des effets de bouts n'est pas négligeable.

## CONCLUSION

Le calcul de la fonction de transfert du fil a montré que même pour des rapports  $l/d$  assez élevés ( $500 < l/d < 1000$ ), les effets de conduction affectaient notablement la mesure des fluctuations de température. En particulier, la variance mesurée  $\overline{\theta_m'^2}$  peut être nettement inférieure à la variance réelle  $\overline{\theta_g'^2}$  (Fig. 4).

Ce dernier résultat met en évidence l'importance du choix des dimensions du fil utilisé comme capteur de température.

## REFERENCES

1. F. N. Frenkiel, Effects of wire-length in turbulence investigations with a hot-wire anemometer, *Aeronaut. Q.* 5 (1954).
2. J. C. Wyngaard, Measurement of small-scale turbulence structure with hot wires, *J. Scient. Instrum.* 1 (1968).
3. H. L. Dryden et A. M. Kuethe, The measurement of fluctuations of air speed by the hot wire anemometer, NACA No. 320 (1929).
4. J. P. Maye, DISA Information No. 9 (Février 1970).
5. F. Millon et P. Paranthöen, Influence des caractéristiques du capteur sur la mesure des fluctuations de température, Rapport interne T2, L.A. No. 230, Fac. des Sc. Rouen (Février 1976).
6. J. Hojstrup, K. Rasmussen et S. E. Larsen, DISA Information No. 20 (Septembre 1976).

## INFLUENCE OF THERMAL EXCHANGES BETWEEN THE SENSOR AND ITS SUPPORTS ON TEMPERATURE FLUCTUATION MEASUREMENT IN A TURBULENT AIRFLOW

**Abstract**—The transfer function for a platinum wire used as a temperature sensor has been calculated in order to determine the influence of conduction effects on fluctuations measurement in a turbulent airflow.

This calculation shows that thermal exchanges between the sensor and its supports can appreciably act upon measurements of variance and spectrum of temperature fluctuations.

The influence of these conduction effects on measurements performed behind a heated grid is pointed out.

## DER EINFLUSS DES WÄRMEAUSTAUSCHES ZWISCHEN FÜHLER UND AUFHÄNGUNG AUF DIE MESSUNG VON TEMPERATURFLUKTUATIONEN IN EINEM TURBULENTEN LUFTSTROM

**Zusammenfassung**—Zur Bestimmung des Einflusses von Wärmeleiteffekten auf die Messung von Schwankungsgrößen in einem turbulenten Luftstrom wurde die Übergangsfunktion eines als Temperaturfühler verwendeten Platindrahtes berechnet. Die Berechnung ergibt, daß sich Wärmeaustausch zwischen Fühler und Aufhängung in beträchtlichem Ausmaß auf die Messung der Amplitude und Frequenz von Temperaturfluktuationen auswirkt. Der Einfluß dieser Wärmeleiteffekte auf Messungen hinter einem beheizten Gitter wird verdeutlicht.

**ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ  
И ЕГО ОПОРАМИ НА ДАННЫЕ ИЗМЕРЕНИЙ ПУЛЬСАЦИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ  
В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ ВОЗДУХА**

**Аннотация** — Для определения влияния теплопроводности на данные измерений температурных пульсаций в турбулентном потоке воздуха рассчитывается функция переноса для платиновой проволоки, используемой в качестве чувствительного элемента датчика температур. Расчеты показывают, что теплообмен между проволокой и ее опорой может значительно искажать данные по величине и спектру температурных пульсаций. Показано влияние теплопроводности на данные измерений, выполненных за нагреваемой решеткой.